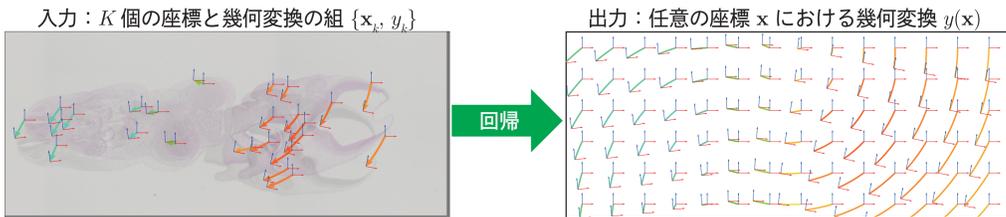


# OS1B-2 幾何変換の合成に基づく変形場のスパースモデリング

船富卓哉, 山田重人, 藤村友貴, 櫛田貴弘, 向川康博 (奈良先端大・JST さきがけ・京大)

## 問題設定



## 本研究のポイント

- ベクトル場の概念を拡張する幾何変換場を提案
- 幾何変換が持つ乗法群の性質に対応するため, 内測平均に基づいてカーネル回帰分析を再定式化
- 零元を持たない剛体変換に対してスパース正則化を導入
- 画像の非剛体位置合わせへの応用を実現

## 従来の回帰モデル

### 線形 Kernel 回帰モデル

$$f(x) = \sum_i c_i \Phi_i(x)$$

例) Gaussian kernel

$$\Phi_i(x) = \exp(-\gamma \|x - x_i\|_2^2)$$

### 線形 Kernel 回帰モデルの解法

\* そのままでは overfit するため, Ridge 回帰など正則化を含める

$$c_i = (K + \lambda I_N)^{-1} y$$

$$K = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_N(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1(x_N) & \dots & \Phi_N(x_N) \end{pmatrix}$$

### リーマン多様体上での回帰モデル [1]

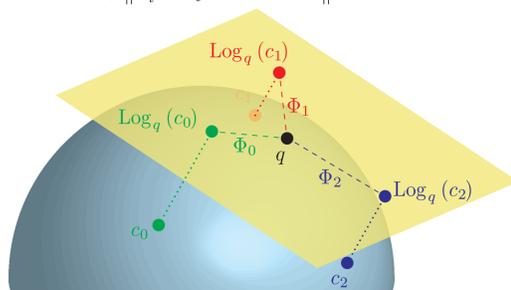
$$y(x) = \operatorname{argmin}_{q \in \mathcal{M}} \sum_i \frac{\Phi_i(x) d(q, c_i)^2}{\sum_j \Phi_j(x)}$$

非凸な重みによる内測平均として定式化

## 内測平均による幾何変換の合成

多様体上での重み付き平均: 線形和に相当

$$q = \operatorname{argmin}_{q \in \operatorname{SE}(2)} \left\| \sum_i \frac{\Phi_i}{\sum_j \Phi_j} \operatorname{Log}_q(c_i) \right\|$$



$$\operatorname{Log} A = \begin{pmatrix} \cos \theta_A & -\sin \theta_A & u_A \\ \sin \theta_A & \cos \theta_A & v_A \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\theta_A & V_A^{-1} \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \end{pmatrix} \\ \theta_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

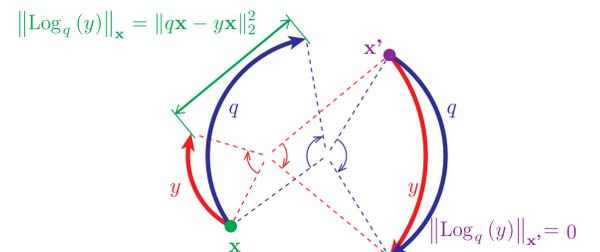
$$V_A^{-1} = \begin{cases} I_2, & \theta_A = 0 \\ \frac{\theta_A}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sin \theta_A}{1 - \cos \theta_A} & 1 \\ -1 & \frac{\sin \theta_A}{1 - \cos \theta_A} \end{pmatrix}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

## 【提案】幾何変換の回帰モデル

$$y(x) = \operatorname{argmin}_{q \in \operatorname{SE}(2)} \left\| \sum_i \frac{w_i^2 \Phi_i(x)}{\sum_j w_j^2 \Phi_j(x)} \operatorname{Log}_q(c_i) \right\|$$

### 1. 幾何変換場における計量の導入

剛体変換だけでは計量が定義できない



### 2. スパース正則化のための重み $w_i$ の導入

剛体変換には零元がない

$$c_i, w_i = \operatorname{argmin}_{c_i \in \operatorname{SE}(2), w_i \in \mathbb{R}} E(c_i, w_i)$$

$$E(c_i, w_i) = \frac{1}{K} \sum_k \left\| \sum_i \frac{w_i^2 \Phi_i(x_k)}{\sum_j w_j^2 \Phi_j(x_k)} \operatorname{Log}_{y_k}(c_i) \right\|_{x_k} + \lambda \sum_i |w_i|$$

### 3. 定数項の導入

そのままではスパース性が得られない

$$w_0 \Phi_0(x) = \epsilon, c_0 = \mathbf{I}$$

## さまざまなクラスの幾何変換

本研究では剛体変換  $\operatorname{SE}(2)$  を対象としたが, 他も可能

- 並進  $\mathbb{R}^d$ : 従来のベクトル場と等価
- 剛体変換  $\operatorname{SE}(d)$ : 並進 + 回転
- 相似変換  $\operatorname{SIM}(d)$ : 並進 + 回転 + 拡大縮小
- アフィン変換  $\operatorname{Aff}(d)$ , 回転変換  $\operatorname{SO}(d)$  など

加算で複数の変換を合成できるのは並進のみ

その他は全て乗算を法とする (並進は乗算でも記述可能)

## 幾何変換を変数とした最適化

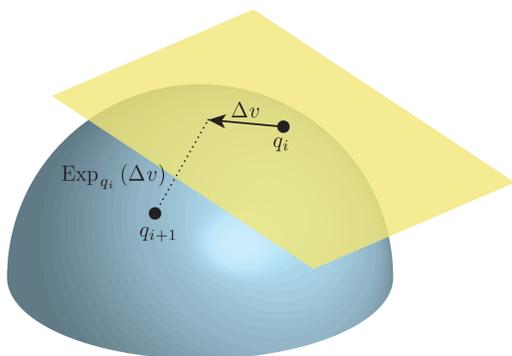
Algorithm 1 Algorithm for optimization on  $\operatorname{SE}(2)$

Input: Initial value  $q_0 \in \operatorname{SE}(2)$ , learning rate  $\alpha \in \mathbb{R}$ , error function  $E(q) \in \mathbb{R}$

Output: Optimal value  $q_t \in \operatorname{SE}(2)$

- ```

v ← 0 ∈ se(2)
for i = 1 to l do
  L ← E(Exp_{q_i}(v))
  Δv ← -α ∂L/∂v
  q_{i+1} ← Exp_{q_i}(Δv)
end for
  
```
1. 接平面上で変数  $v = 0$  を定義
  2. 指数写像で幾何変換に (値としては不変)
  3. 接平面上での勾配を計算
  4. 指数写像で幾何変換を更新



## シミュレーション実験による評価

### 評価用データの生成

2つの因子の重み付き内測平均として幾何変換場を生成

重みとしては Gaussian kernel を採用

Training 用サンプル:  $K=24$  個の  $\{x_k, y_k\}$  をランダム抽出

Validation 用サンプル:  $L=84$  個の  $\{x_l, y_l\}$  を格子点上で抽出

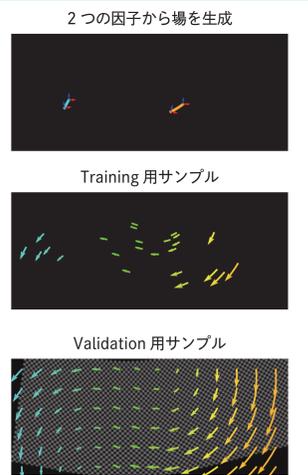
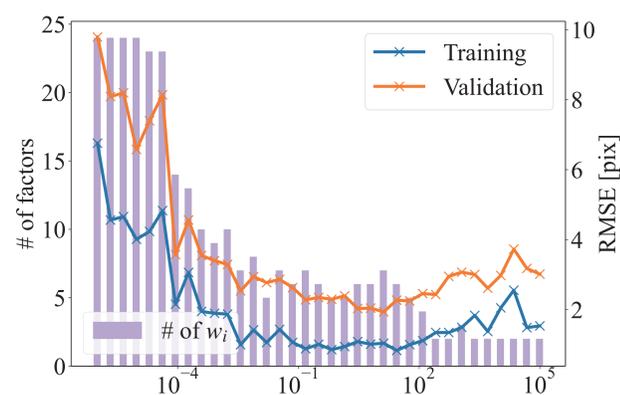
### スパースモデリングの評価

スパース正則化項の重み  $\lambda$  を変化させながら  $\{w_i, c_i\}$  を推定

スパース性: 有効な大きさの値を持つ  $w_i$  の数

Training/Validation サンプルにおける残差

$$\sqrt{\frac{1}{K} \sum_k (y_k x_k - y(x_k) x_k)^2} \quad \sqrt{\frac{1}{L} \sum_l (y_l x_l - y(x_l) x_l)^2}$$



## 非剛体位置合わせへの適用例

特徴点对

推定された変形場

変形結果

