

発生過程における変形のグラフフーリエ変換による成分分解の試み

松山 友騎[†] 船富 卓哉[†] 宇都宮夏子^{††} 山田 重人^{††}

藤村 友貴[†] 櫛田 貴弘[†] 向川 康博[†]

[†] 奈良先端科学技術大学院大学先端科学技術研究科 〒630-0192 奈良県生駒市高山町 8916-5

^{††} 京都大学大学院医学研究科 〒606-8501 京都市左京区吉田近衛町

あらまし ヒト胚子の発生過程における変形を対象として、グラフフーリエ変換を用いたスペクトル分解によって解析し、その形態学的解釈を試みる。異なる発生段階にある形状間での変形場を、3次元表面上で観測された信号とみなし、これに対するスペクトル分解によってさまざまなスケールの変形成分を抽出した。変形場として、変位ベクトル場と幾何変換場の2種類の表現に対してスペクトル分解を行い、それぞれを比較検討した。

Study on Decomposition of Deformation in Embryonic Development using Graph Fourier transform

Tomoki MATSUYAMA[†], Takuya FUNATOMI[†], Natsuko UTSUNOMIYA^{††}, Shigehito YAMADA^{††},

Yuki FUJIMURA[†], Takahiro KUSHIDA[†], and Yasuhiro MUKAIGAWA[†]

[†] Nara Institute of Science and Technology

^{††} Kyoto University

1. はじめに

ヒトの形態形成過程の理解は発生学における重要な課題である。妊娠3-9週の発生初期を胚子期と呼び、様々な臓器が分化する器官形成期であるだけでなく、3次元的に劇的な変形が生じることで知られている[1]。また、胚子期は外的要因への感受性が強く、様々な先天異常を生じる可能性がある[2],[3]。異常発生のプロセスの解明に向けて、正常な発生を3次元的に理解することを目的とした様々な研究が行われている。それらは主に、微細な胚の画像取得により形態形成を可視化するもので、高解像度MRIを利用したMRI顕微鏡によるもの[4]、位相X線CTによるもの[5]などが挙げられる。どちらも3次元的な形態変化をイメージングによって詳細に観察しているが、複雑な変形の解釈には至っていない。

近年では、Geometric Morphometricsが発生学に導入され、解剖学的特徴点の空間座標に対して主成分分析を行うことで変形の統計学的な解釈を行うことが可能となった[6]。主成分分析は最もよく用いられる統計解析手法の1つであり、変形に伴う空間座標の変化から主要な変動を抽出できるため、その解釈に役立つ。しかし、各特徴点の座標値がそれぞれ独立に扱われ、全体形状を考慮した分析が行えるわけではない。

そこで本研究では、変形による解剖学的特徴点の変化を3次元表面上で観測される信号とみなし、これらの近接関係などを考慮してスペクトル解析を行う手法を提案する。これにより、3次元表面上での大域的な変形から局所的な変形まで、さまざまなスケールでの成分に分解することができる。本稿では、分解した成分の可視化を通して、その形態学的解釈を試みる。

2. 問題設定

本研究では、ヒト胚子の発生過程における変形を解析の対象とする。京都コレクション[5]には正常体・異常体も含め、さまざまな発生段階にあるヒト胚標本が収蔵されている。また[7]では発生学に関する教材の開発を目的とし、胚子期におけるCarnegie stage (CS) 13-23のそれぞれについて、個体差などを除いた標準的な形態を表す3次元メッシュを手で作成した。発生過程における変形を示すため、異なる発生段階にあるモデルの頂点間での対応が取れており、共通の三角メッシュ構造を持つよう構成されている。この時、モデル間の変形は対応する頂点間での位置変化として記述することができる。本研究では、これをメッシュ上で定義された信号とみなしてスペクトル解析を行うことによって、変形の成分分解を試みる。本稿では図1に示す、CS17からCS23への変形を対象として解析した結果を

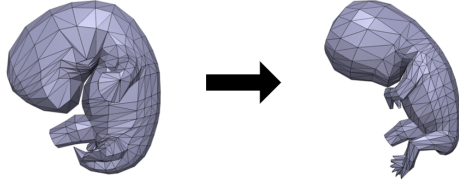


図 1: 解析の対象とする CS17 (左) と CS23 (右) のモデル

示す。

現段階では人手で作成された 3 次元メッシュ系列を対象としているため、頂点間の対応関係が既知であることやメッシュ構造が共通であることを仮定しているが、仮に発生段階によって異なる頂点数やメッシュ構造を持つ場合にも、例えば [8] のような形状解析手法を用いることによりメッシュ間の対応付けが得られると考えられる。

3. 3 次元メッシュ上の信号に対するスペクトル解析

信号処理は、音声や画像といった信号の圧縮・伝送・保存を目的として、フーリエ変換に代表されるようなスペクトル解析等を行う技術である。一般的な信号処理では、信号が時間的あるいは空間的に均等にサンプリングされていることを前提とする。これに対し、グラフは一般に均等でなく、その頂点上で定義された信号に対して従来の信号処理技術はそのまま適用できない。このような不均等にサンプリングされた信号に対しては、信号の構造を明に指定した上で処理を行う、グラフ信号処理 [9] が用いられる。ここでは、グラフ頂点上で定義された信号に対する解析手法の基礎理論について述べる。

3.1 グラフラプラシアンと固有ベクトル

有限無向グラフは $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ と表現できる。 $v \in \mathcal{V}$ は頂点、 $e \in \mathcal{E}$ は辺である。このメッシュにおける頂点数は $|\mathcal{V}| = N$ である。頂点番号を i 、 i に隣接する頂点番号を $j \in \mathcal{N}(i)$ と表記する。グラフ信号を $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ と定めるとき、 $\mathbf{f}$ に対するグラフラプラシアンは次のように表現される [10]。

$$(\mathbf{L}\mathbf{f})_i = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} w_{ij}(f_i - f_j) \quad (1)$$

ここで、 w_{ij} は 2 つの頂点 i, j を結ぶ辺 e_{ij} に定義された重みである。式 (1) を行列形式によって表記すると、グラフラプラシアンは以下で表される。

$$\mathbf{L} = (\mathbf{A} - \mathbf{D}) \quad (2)$$

$\mathbf{A}$ は $N \times N$ 隣接行列であり、

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & e_{ij} \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

である。また $\mathbf{D}$ は次数行列であり、 $\text{diag}(\sum_j \mathbf{A}_{ij})$ である。このときグラフラプラシアン $\mathbf{L}$ も実対称行列となる。 $\mathbf{L}$ の固有値を $\{\lambda_l\}$ 、固有ベクトルを $\{\mathbf{u}_l\}$ とする ($l = 0, 1, \dots, N-1$) と、固

有値問題は次式で示すことができる。

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_l = \lambda_l \mathbf{u}_l \quad (4)$$

また、 $\mathbf{L}$ は実対称行列であるため、固有ベクトルにより構成される行列を $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_l\}$ 、 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$ とすると

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T \quad (5)$$

と表せる。

3.2 グラフフーリエ変換 [11]

信号 $f(t)$ に対するフーリエ変換は以下のように定義される。

$$\hat{f}(\xi) := \langle f, e^{j2\pi\xi t} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-j2\pi\xi t} dt \quad (6)$$

上式における複素指数関数は、以下に示される 1 次元のラプラス作用素の固有関数である。

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (2\pi\xi)^2 e^{j2\pi\xi t} \quad (7)$$

つまり、フーリエ変換はラプラス作用素の固有関数による $f(t)$ の展開である。この信号処理におけるフーリエ変換と同様に、グラフ上の信号 $\mathbf{f}$ に対するグラフフーリエ変換は、スペクトル基底 $e^{j2\pi\xi t}$ として固有ベクトル $\{\mathbf{u}_l\}$ を用いて、以下のよう

$$\hat{f}_l := \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_l \rangle = \sum_{i=1}^N f_i u_{li} \quad (8)$$

これにより、スペクトル基底に対応する成分がグラフスペクトル $\hat{\mathbf{f}} = \{\hat{f}_l\}$ として得られる。また、逆フーリエ変換は以下のよう

$$f_i = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l u_{li} \quad (9)$$

3.3 Laplace-Beltrami 作用素

以上では、一般的なグラフに対するラプラシアンとフーリエ変換について述べた。本研究で扱う 3 次元メッシュもグラフとみなすことが可能であり、3 次元形状解析手法などにグラフラプラシアンが用いられている [12]。ここでは、3 次元メッシュをグラフとして扱う場合に、連続表面に対する Laplace-Beltrami 作用素を離散化したものとして用いられる、余接重みを用いた有限要素法について述べる。

3 次元メッシュを構成する頂点、辺、三角形の集合を用い、メッシュを $\mathcal{M} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{T}\}$ と表記する。式 (1) の w_{ij} には、三角パッチに対する余接重み [13]

$$w_{ij} = \frac{1}{2} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) \quad (10)$$

が用いられる。ここで α_{ij}, β_{ij} は e_{ij} を共有する 2 つの三角形の対になる角である。

3.2 では、グラフフーリエ変換におけるスペクトル基底はグラフラプラシアンの固有ベクトルとして求めることができた。ただし、それは $\mathbf{L}$ が半正定値対称行列の場合であり、有限要素法を用いる場合は対称行列ではなくなるため、式 (2) では直交

性が失われる [14]. 直交性を担保するため, 有限要素法を用いる場合は以下の行列による正規化が用いられる.

$$\mathbf{B}_{ij} = \begin{cases} \left(\sum_{t \in t_i^\Delta} \text{area}(t) \right) / 6 & i = j \\ (\text{area}(t_a) + \text{area}(t_b)) / 12 & e_{ij} \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

t_a と t_b は e_{ij} を共有する三角形であり, $t_i^\Delta = \{\forall t \ni v_i\} \subset \mathcal{T}$ としたときの t の面積を $\text{area}(t)$ としている (図 2).

この正規化を用いた場合の, 信号 $\mathbf{f}$ と固有ベクトル $\mathbf{u}_l$ の内積は以下のように定義される.

$$(\mathbf{f}, \mathbf{u}_l)_\mathbf{B} = \mathbf{f}^\top \mathbf{B} \mathbf{u}_l \quad (12)$$

Laplace-Beltrami 作用素の各固有ベクトルはメッシュ上でのスペクトル基底を表現する [15]. メッシュ上でのスペクトル基底について, 周波数が低いものから 10 個を図 3 に例示する. 図から, 先頭が直流成分で最も低周波な成分, 後の成分ほど高周波な成分となっていることが分かる.

3.4 3次元メッシュ上での信号のスペクトル分解

3次元メッシュに対するグラフフーリエ変換を用いることで, 周波数フィルタリングは式 (8) の逆フーリエ変換を用いて次式で表すことができる.

$$f_i^{\text{out}} = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l^{\text{in}} \hat{h}_l u_{il} \quad (13)$$

ここで, $\hat{h}$ はフィルタ関数, $\hat{\mathbf{f}}^{\text{in}} = \{\hat{f}_l^{\text{in}}\} \in \mathbb{R}^N$ は式 (12) で得られるグラフスペクトルである. 信号のフィルタリング処理を行列形式で表すと, $\mathbf{f}^{\text{out}} = \{f_i^{\text{out}}\} \in \mathbb{R}^N$ は以下によって得られる.

$$\mathbf{f}^{\text{out}} = \mathbf{U} \mathbf{H} \mathbf{U}^\top \mathbf{B}^\top \hat{\mathbf{f}}^{\text{in}} \quad (14)$$

なお, フィルタ関数によって構成されるフィルタ行列は $\mathbf{H} = \text{diag}(\hat{h}_0, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_{N-1})$ の対角行列である. 各周波数に対応する要素以外を 0 とすることで, 信号のスペクトル成分を抽出できる.

4. 変形の成分分解

3. で述べたスペクトル解析手法を用い, 発生過程で生じる変形の成分分解を試みる. ここでは, 3次元メッシュ上で定義される信号として, モデルの対から算出される変形場について述

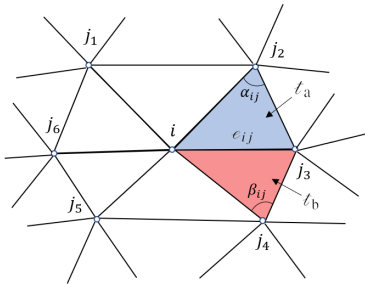


図 2: Laplace-Beltrami 作用素を適用する三角メッシュ

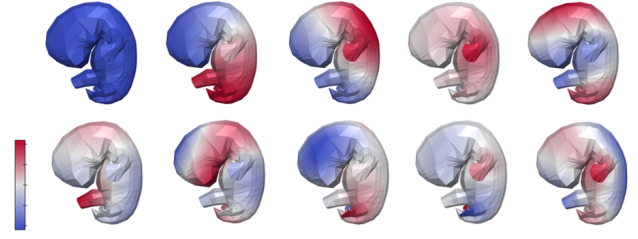


図 3: 3次元メッシュ上でのスペクトル基底 $\mathbf{u}_l$ を図示したもの. 図中のモデルは左上から右下にかけて $\mathbf{u}_0$ から $\mathbf{u}_9$ を示している. 左にあるカラーバーは固有ベクトルで頂点に対応する値を示し, 赤は正, 青は負を示す. また, 色が濃いほど正負に大きな値であることを示す.

べる. また, 各スペクトル成分の強度を測る指標として, 変形場に対するパワースペクトルの導入を試みる.

4.1 変形場のスペクトル解析

ここでは2つのモデル間における変形を, 対応点間の変位ベクトル場および幾何変換場として表現する.

4.1.1 変位ベクトル場

3次元空間における変形前の頂点座標を $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3$, 変形後の頂点座標を $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ とすると, 変形による変位ベクトルは次式となる.

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i \quad (15)$$

と求められる. 3. では, グラフ上で定義される信号は各頂点で実数値 $\mathbb{R}$ として定義されていたが, 変位ベクトルの各次元について独立な信号とみなし, それぞれに式 (12) に基づいてグラフスペクトルを求めることでスペクトル解析を行う.

$$\mathcal{F}[\{\mathbf{v}_i\}] = \mathbf{U}^\top \mathbf{B}^\top [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_N]^\top \in \mathbb{R}^{N \times 3} \quad (16)$$

ここで $\mathcal{F}[\cdot]$ はグラフフーリエ変換による全周波数のスペクトルを表すものとする. すると, l 番目の周波数に対応するスペクトル成分は以下によって得られる.

$$[\mathbf{v}_{1,l} \cdots \mathbf{v}_{N,l}]^\top = \mathbf{U} \mathbf{H}_l \mathcal{F}[\{\mathbf{v}_i\}] \quad (17)$$

なお $\mathbf{H}_l = \text{diag}(0, \dots, 0, \hat{h}_l, 0, \dots, 0)$ とする.

4.1.2 幾何変換場

変位ベクトル場では, 各次元を独立な信号として扱うため, 得られる成分は座標系の取り方に依存する. 座標系に非依存な変形の表現方法として, 本研究では各頂点の位置変化を幾何変換によって表現し, このスペクトル解析を試みる. 座標系の取り方に依存しない幾何変換として, ここでは等角性を保存する相似変換を用いる.

各頂点の座標を同次座標系によって表現すれば, 相似変換 $\mathbf{Q} \in \text{Sim}(3)$ は 4×4 行列として記述される回転 $\mathbf{R}$, 並進 $\mathbf{T}$, スケーリング $\mathbf{S}$ の積として表現される. これらのパラメータは変形前後での1対の頂点 $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ だけでは定まらないため, 隣接頂点集合 $\{\mathbf{a}_j\}, \{\mathbf{b}_j\}$ も用いてこれらのパラメータを定める. この時, 着目する頂点对 $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ については一致し, 隣接頂点集合

$\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$ の残差二乗和 $e^2(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ が最小となるよう $\mathbf{Q}$ を求める。

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_{\mathbf{b}_i} \mathbf{S} \mathbf{R} \mathbf{T}_{\mathbf{a}_i}^{-1} \quad (18)$$

$$e^2(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \sum_{j \in N(i)} \|\tilde{\mathbf{b}}_j - \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{a}}_j\|^2 \quad (19)$$

なお, $\mathbf{T}$ はベクトル・の並進, $\mathbf{r}$ は同次座標を表し, この解は [16] に基づけば解析的に得られる。

以上で得られる各頂点での相似変換 $\{\mathbf{Q}_i\}$ に対して, グラフスペクトルを求める。このとき, 相似変換では 4×4 行列の要素が独立ではないため, 前節のように各要素で独立にグラフスペクトルを求めるべきではない。実際, 式 (13) ではグラフスペクトルとスペクトル基底の線形和として周波数フィルタリングを定式化しているが, 相似変換 $\mathbf{Q}$ のスカラー倍は一般的には相似変換とならず ($\exists k \in \mathbb{R} : k\mathbf{Q} \notin \text{Sim}(3)$), 線形和によって得られるものは相似変換とならない。これは相似変換に限らず, 一般の幾何変換が乗法では閉じているが, 加法では閉じていないことによる。

相似変換のスペクトル成分が相似変換となることを担保するため, 本手法では接空間でスペクトル分解を行う。相似変換が成す多様体を $\mathcal{M}$ としたとき, ある相似変換 $\mathbf{P} \in \mathcal{M}$ における接ベクトル空間 $\mathbf{T}_{\mathbf{P}}\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}$ への写像 $\mathbf{T}_{\mathbf{P}}\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ およびその逆写像 $\mathcal{M} \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{P}}\mathcal{M}$ はそれぞれ指数写像 $\text{Exp}_{\mathbf{P}}$, 対数写像 $\text{Log}_{\mathbf{P}}$ と呼ばれる。行列表現された相似変換に対してはそれぞれ行列の指数関数, 対数関数によって次のように計算される。

$$\text{Exp}_{\mathbf{P}} : \mathbf{q} \mapsto \mathbf{P} \exp(\mathbf{q}) \quad (20)$$

$$\text{Log}_{\mathbf{P}} : \mathbf{Q} \mapsto \log(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}) \quad (21)$$

本手法では, 2 つの 3 次元メッシュに対するプロクラステス分析 [17] で得られる相似変換を $\mathbf{P}$ とし, 各頂点および隣接頂点から得られる相似変換 $\mathbf{Q}_i$ の対数写像に対して式 (12) に基づいたグラフスペクトルを求めることとした。

$$\mathbf{q}_i = \text{Log}_{\mathbf{P}} \mathbf{Q}_i \quad (22)$$

$$\mathcal{F}[\{\mathbf{q}_i\}] = \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T [\text{vec}(\mathbf{q}_1) \cdots \text{vec}(\mathbf{q}_N)]^T \in \mathbb{R}^{N \times 16} \quad (23)$$

なお, $\text{vec}(\mathbf{q})$ は $\mathbf{q}$ をベクトル化したものである。

また, l 番目の周波数に対応するスペクトル成分は以下で得られる。

$$[\text{vec}(\mathbf{q}_{1,l}) \cdots \text{vec}(\mathbf{q}_{N,l})]^T = \mathbf{U} \mathbf{H}_l \mathcal{F}[\{\mathbf{q}_i\}] \quad (24)$$

$$\mathbf{Q}_{i,l} = \text{Exp}_{\mathbf{P}} \mathbf{q}_{i,l} \quad (25)$$

4.2 変形場のパワースペクトル

変形場のスペクトル分解により, さまざまな周波数に対応する変形成分が得られる。これらの質的評価のためには, 分解された変形成分から主要なものを選定することが重要である。

一般のスペクトル解析においては, 各スペクトル成分の強度を表すパワースペクトルが重要な指標の 1 つである。これに対し, 特に相似変換に対しては, その強度の尺度が自明ではない。そこで本手法では, 相似変換のスペクトル成分に対し, 各頂点

における変形の軌跡を求め, その長さによって強度を評価することとした。指標としては, 大局的な変形を示す成分, 局所的な変形を示す成分を評価するものを挙げる。

まず, スペクトル成分として各頂点で相似変換 $\mathbf{Q}_{i,l}$ が定まり, その軌跡は曲線となる。ここでは折れ線近似によってこの長さを評価する。具体的には変形による軌跡の内分点 $\mathbf{a}_{i,l,k} (k = 0, \dots, p)$ を求めることで p 本の折れ線として近似し, 内分点間のユークリッド距離の和として, 軌跡の長さを求める。

$$D_{i,l} = \sum_{k=1}^p \|\mathbf{a}_{i,l,k} - \mathbf{a}_{i,l,k-1}\| \quad (26)$$

なお, 内分点は相似変換行列に対する対数写像, 指数写像を用いて以下のように算出する。

$$\mathbf{a}_{i,l,k} = \text{Exp}_{\mathbf{P}}\left(\frac{k}{p} \text{Log}_{\mathbf{P}} \mathbf{Q}_{i,l}\right) \tilde{\mathbf{a}}_i \quad (27)$$

変位ベクトル場についても同様に軌跡長によって評価するが, これは単に $D_{i,l} = \|\mathbf{v}_{i,l}\|$ となる。

以上で, 各スペクトル成分における各頂点の軌跡長が求められる。これを基にスペクトル成分の強度を評価する。ここでは, 大局的な指標として二乗平均平方根 RMS と, 局所的な指標として最大値 MAX を用いることとする。

$$\text{RMS}_l = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_{i,l}^2} \quad (28)$$

$$\text{MAX}_l = \max_i D_{i,l} \quad (29)$$

5. 実 験

5.1 実験条件

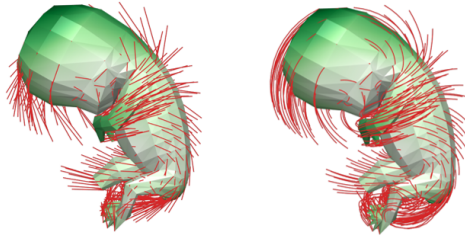
2. で述べた CS17, CS23 の 3 次元メッシュを用いた実験を行った。これらの 3 次元メッシュ $\mathcal{M}$ は頂点数 $N = 562$, 辺数 $|\mathcal{E}| = 3,360$, 三角形数 $|\mathcal{T}| = 1,120$ で構成されている。これらの間での変形場として, 変位ベクトル場と幾何変換場を求めた結果を図 4 に示す。指数関数・対数関数とプロクラステス分析には [18] の実装を用いた。また, CS17 の 3 次元メッシュに対して [19] の実装を用いてスペクトル基底を求めた。

5.2 スペクトル基底に対応する変形成分

まず, 変形場をスペクトル分解した結果として, スペクトル基底とそれに対応する変形成分を図示する。図 5 に, $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ に対応する変位ベクトル場および幾何変換場による変形成分を示す。

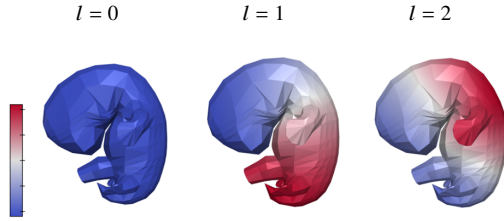
$\mathbf{u}_1$ ではスペクトル基底の値が頭尾方向に沿って変化している。それに対応するように, 変位ベクトル場および幾何変換場による変形成分は胚子モデルの頭部と臀部の変形が大きい。同様に, $\mathbf{u}_0$ では全頂点に様に作用する変形, $\mathbf{u}_2$ では背腹方向に作用する変形となっている。以上から, スペクトル基底が頂点の近接関係を反映した値を持っており, またスペクトル成分として各頂点が基底の大きさに対応した変形が反映されていることが確認できる。

次に, 変位ベクトル場と幾何変換場を信号としたときの変形

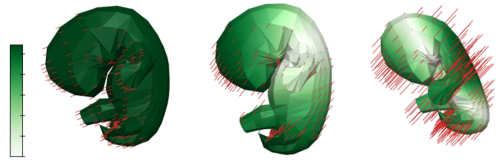


(a) 変位ベクトル場 $\mathbf{v}_i$ (b) 幾何変換場 $\mathbf{Q}_i$

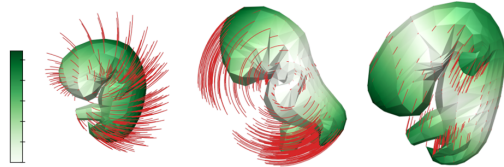
図 4: CS17 から CS23 への変形の軌跡



(a) スペクトル基底 ($\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$)



(b) 変位ベクトル場 ($\mathbf{v}_{i,0}, \mathbf{v}_{i,1}, \mathbf{v}_{i,2}$)



(c) 幾何変換場 ($\mathbf{Q}_{i,0}, \mathbf{Q}_{i,1}, \mathbf{Q}_{i,2}$)

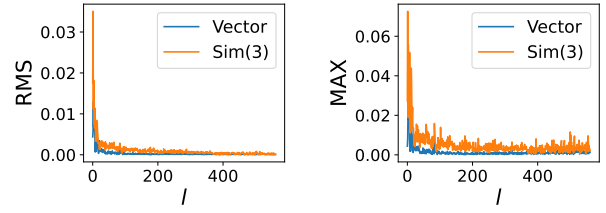
図 5: 変形のスペクトル成分

成分の違いに注目する。捉える形状の特徴は同じであるが、変位ベクトル場による変形成分は $\mathbf{v}_{i,0}, \mathbf{v}_{i,1}, \mathbf{v}_{i,2}$ のいずれでも頂点の変形軌跡が平行となる。一方、幾何変換場による変形成分の場合、 $\mathbf{Q}_{i,0}, \mathbf{Q}_{i,1}, \mathbf{Q}_{i,2}$ はそれぞれスケール変化、回転、変位がスペクトル基底に従って合成され、図 5c に示すように多様な変形を表現する。

5.3 RMS を用いた各変形場での変形成分の評価

ここでは、大局的な指標として式 (28) で示した RMS に着目し、この値が大きい変形成分の定性評価について述べる。まず、図 6a に変位ベクトル場および幾何変換場での各変形成分について算出した RMS を示す。大局的な指標を用いていることから、 λ_l の値が小さく、低周波な成分において RMS の値が大きくなっていることが確認できる。一方、特に高周波な成分において、RMS の値の傾向が変位ベクトル場と幾何変換場で異なっている。

まず、変位ベクトル場の場合に RMS の値が最も大きい変形成分は $\mathbf{v}_{i,2}$ であった。この変形成分は背側と腹側が近づくような変形を表現しており、CS17 から CS23 への変形で身体が相対



(a) 各変形成分の RMS

(b) 各変形成分の MAX

図 6: 各変形成分のパワースペクトル

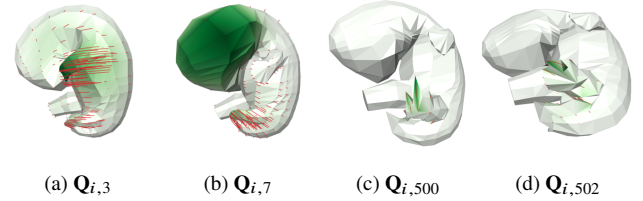


図 7: 幾何変換場の変形成分

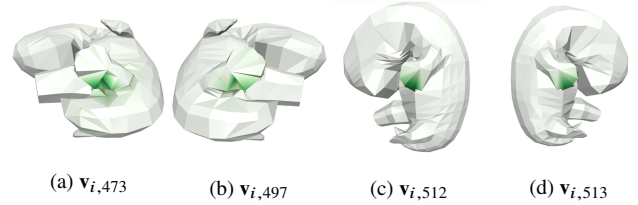


図 8: 変位ベクトル場の変形成分

的に縦長になる特徴を捉えている。一方、各頂点を持つ変形成分が平行なものしかなく、その成分単体で着目しても解釈が難しいものが多かった。

次に、幾何変換場の場合に RMS の値が最も大きい変形成分は $\mathbf{Q}_{i,1}$ であった。この変形成分は頭部と臀部が反対方向に回転し、脊椎の湾曲が減弱するような成分となっている。また図 7 に示すように、次に成分の大きい $\mathbf{Q}_{i,3}$ では上肢が回転しつつ伸長し、その先端にある手が最終的に身体の正面へ位置するような成分となっている。一方、 $\mathbf{Q}_{i,7}$ は側頭部が左右に拡大する変形を表現しているが、CS17 から CS23 ではそのような変形はあまり見られない。これは、 $\mathbf{Q}_{i,3}$ に対応する成分が大きく、側頭部が縮む変形も含まれており、その影響を相殺するものとしてこのような変形成分が現れたと考えられる。

5.4 MAX を用いた各変形場での変形成分の評価

ここでは、局所的な指標として式 (29) で示した MAX に着目し、この値が大きい変形成分の定性評価について述べる。まず、図 6b に変位ベクトル場および幾何変換場での各変形成分について算出した MAX を示す。図 6a とは異なり、図 6b では低周波成分だけでなく、 λ_l の値が大きい高周波成分にも、MAX の値が大きい成分が存在する。この高周波な成分に注目するため、MAX の上位 10% に入る変形成分のうち、 $l > \frac{2N}{3}$ についてを図 8 に示す。

変位ベクトル場での高周波成分で最も MAX の大きい成分は $\mathbf{v}_{i,497}$ であった。この変形は左足首から足の指の変形を主に示し、足首が細くなり一部の指が伸びるような変形になっている

を解釈できる。次に MAX の大きい $\mathbf{v}_{i,473}$ も右足首で類似の変形が現れている。 $\mathbf{v}_{i,512}$, $\mathbf{v}_{i,513}$ は右手, 左手の指の変形が現れている。

幾何変換場での高周波成分で最も MAX が大きい成分は図 7 に示す $\mathbf{Q}_{i,500}$ であり, 左足の指が伸びる変形と解釈できる。同様に $\mathbf{Q}_{i,502}$ でも同じ位置における変形が現われている。一方, 前節で述べたように, 実際より大きな変形が現れていることが見て取れる。

以上をまとめると, 変位ベクトル場の変形成分については個々に見ても解釈が難しいものが多かった。一方, 幾何変換場では大局的な変形を捉えられており, 成分単体での解釈も可能なものが多かった。一方, 他の変形成分を相殺するような, 余分な変形成分も含まれていることが示唆された。

6. まとめと今後の課題

本研究では, ヒト胚子の発生過程を対象として, 3 次元メッシュ上での変形場を信号とみなし, グラフフーリエ変換を用いたスペクトル分解によってさまざまなスケールの変形成分を抽出する手法を提案した。変位ベクトル場および幾何変換場の 2 種類で表現された変形場に対してスペクトル分解を行い, その結果の形態学的解釈を試みた。また, 各変形成分の強度を測る指標として軌跡長を利用することを提案した。変位ベクトル場の成分では単体での解釈が難しかったのに対し, 幾何変換場の成分では形態学的解釈が可能なものがあった。一方, 幾何変換場では変形成分のパワースペクトルが大きいものが多く, 中には他の変形成分で表現された過剰な変形を相殺するような余分な変形成分が現れているものもあった。スペクトル分解の手法についての検討を重ねていくことが今後の課題である。

謝 辞

本研究は JST さきがけ JPMJPR2025 の支援を受けたものである。

文 献

- [1] U. Drews, 塩田浩平 (訳), 発生学アトラス, 文光堂, 1997.
- [2] 新城 葵, 齊藤 篤, 高桑徹也, 山田重人, 本谷秀堅, 松添 博, 宮内翔子, 諸岡健一, 清水昭伸, “ヒト胚子の解剖学的ランドマークの統計モデルの改良,” 電子情報通信学会技術報告書, 第 119 巻, pp.29–30, 2020.
- [3] K. SHIOTA, “Development and intrauterine fate of normal and abnormal human conceptuses,” *Congenital Anomalies*, vol.31, no.2, pp.67–80, 1991.
- [4] N. Shiraishi, A. Katayama, T. Nakashima, S. Yamada, C. Uwabe, K. Kose, and T. Takakuwa, “Three-dimensional morphology of the human embryonic brain,” *Data in Brief*, vol.4, pp.116–118, 2015.
- [5] Y. Yamaguchi and S. Yamada, “The Kyoto Collection of Human Embryos and Fetuses: History and Recent Advancements in Modern Methods,” *Cells Tissues Organs*, vol.205, no.5–6, pp.314–319, 2018.
- [6] M. Katsube, S. Yamada, R. Miyazaki, Y. Yamaguchi, H. Makishima, T. Takakuwa, A. Yamamoto, Y. Fujii, N. Morimoto, T. Ito, H. Imai, and S. Suzuki, “Quantitation of nasal development in the early prenatal period using geometric morphometrics and mri: a new insight into the critical period of binder phenotype,” *Prenatal Diagnosis*, vol.37, no.9, pp.907–915, 2017.
- [7] S. Yamada, C. Uwabe, T. Nakatsu-Komatsu, Y. Minekura, M. Iwakura, T. Motoki, K. Nishimiya, M. Iiyama, K. Kakusho, M. Minoh, S. Mizuta, T. Matsuda, Y. Matsuda, T. Haishi, K. Kose, S. Fujii,

- and K. Shiota, “Graphic and movie illustrations of human prenatal development and their application to embryological education based on the human embryo specimens in the kyoto collection,” *Developmental Dynamics*, vol.235, no.2, pp.468–477, 2006.
- [8] N. Donati, A. Sharma, and M. Ovsjanikov, “Deep geometric functional maps: Robust feature learning for shape correspondence,” 2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), pp.8589–8598, 2020.
- [9] 田中雄一, “グラフ信号処理のすゝめ,” 電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ Fundamentals Review, vol.8, no.1, pp.15–29, 2014.
- [10] H. Zhang, O.v. Kaick, and R. Dyer, “Spectral methods for mesh processing and analysis,” *Eurographics 2007 - State of the Art Reports*, eds. by D. Schmalstieg and J. Bittner, pp.1–22, The Eurographics Association, 2007.
- [11] D.I. Shuman, S.K. Narang, P. Frossard, A. Ortega, and P. Vandergheynst, “The emerging field of signal processing on graphs: Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains,” *IEEE signal processing magazine*, vol.30, no.3, pp.83–98, 2013.
- [12] Y. Wang and J. Solomon, “Chapter 2 - intrinsic and extrinsic operators for shape analysis,” *Processing, Analyzing and Learning of Images, Shapes, and Forms: Part 2*, eds. by R. Kimmel and X.-C. Tai, vol.20, pp.41–115, *Handbook of Numerical Analysis*, Elsevier, 2019.
- [13] U. Pinkall and K. Polthier, “Computing discrete minimal surfaces and their conjugates,” *Experimental Mathematics*, vol.2, no.1, pp.15–36, 1993.
- [14] U. Graichen, R. Eichardt, P. Fiedler, D. Strohmeier, F. Zanow, and J. Haueisen, “SPHARA—a generalized spatial Fourier analysis for multi-sensor systems with non-uniformly arranged sensors: application to EEG,” *PLoS One*, vol.10, no.4, p.e0121741, 2015.
- [15] A. Dubrovina and R. Kimmel, “Matching shapes by eigendecomposition of the laplace-beltrami operator,” 2010.
- [16] S. Umeyama, “Least-squares estimation of transformation parameters between two point patterns,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.13, pp.376–380, 1991.
- [17] J.C. Gower, “Generalized procrustes analysis,” *Psychometrika*, vol.40, no.1, pp.33–51, 1975.
- [18] P. Virtanen, R. Gommers, T.E. Oliphant, M. Haberland, T. Reddy, D. Cournapeau, E. Burovski, P. Peterson, W. Weckesser, J. Bright, S.J. van der Walt, M. Brett, J. Wilson, K.J. Millman, N. Mayorov, A.R.J. Nelson, E. Jones, R. Kern, E. Larson, C.J. Carey, İlhan Polat, Y. Feng, E.W. Moore, J. VanderPlas, D. Laxalde, J. Perktold, R. Cimrman, I. Henriksen, E.A. Quintero, C.R. Harris, A.M. Archibald, A.H. Ribeiro, F. Pedregosa, P. van Mulbregt, and SciPy 1.0 Contributors, “SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python,” *Nature Methods*, vol.17, pp.261–272, 2020.
- [19] U. Graichen, R. Eichardt, and J. Haueisen, “Spharapy: A python toolbox for spatial harmonic analysis of non-uniformly sampled data,” *SoftwareX*, vol.10, p.100289, 2019.